

## 15.1

- a) Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 52 alkia, voidaan valita 7 alkion osajoukko.

Korttipakan 52 kortista voidaan valita 7 korttia

$$\binom{52}{7} = 133784560 \quad \text{Laskimella } nCr(52, 7).$$

tavalla.

- b) Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 11 alkia, voidaan valita 2 alkion osajoukko.

Suklaarasian 11 konvehdistista voidaan valita 2

$$\binom{11}{2} = 55 \text{ tavalla.}$$

- c) Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 15 alkia, voidaan valita 3 alkion osajoukko.

15 kravatista voidaan valita 3

$$\binom{15}{3} = 455 \text{ tavalla.}$$

### Vastaus

- a) 133 784 560  
b) 55  
b) 455

## 15.2

Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 193 alkioita, voidaan valita 3 alkion osajoukko.

193 suurlähettiläästä voidaan valita 3

$$\binom{193}{3} = 1\,179\,616 \quad \text{Laskimella } nCr(193, 3).$$

tavalla.

**Vastaus**

1 179 616

## 15.3

- a) Jokainen lottorivi on 40 luvun joukosta valittu 6-alkioinen osajoukko. Erilaisten lottorivien lukumäärä on

$$\binom{40}{6} = 3\,838\,380.$$

- b) Kaikki lottorivit ovat yhtä todennäköisiä voittorivejä, ja vain yhdessä kaikki 6 numeroa ovat oikein.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(6 \text{ oikein}) = \frac{1}{3\,838\,380} \approx 2,61 \cdot 10^{-7}$$

- c) Kun 40 luvun joukosta poistetaan 6 voitonnumeroa, jäljelle jää 34 lukua. Tapahtumalle ”ei yhtään oikein” suotuisia alkeistapauksia ovat ne lottorivit, joiden jokainen numero on valittu näiden 34 luvun joukosta.

Lottorivejä, joissa ei ole yhtään numeroa oikein, on

$$\binom{34}{6} (= 1344904).$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{ei yhtään oikein}) = \frac{\binom{34}{6}}{\binom{40}{6}} \approx 0,350 \quad \text{Laskimella } \frac{nCr(34, 6)}{nCr(40, 6)}.$$

### Vastaus

- a) 3 838 380  
b)  $2,61 \cdot 10^{-7}$   
b) 0,350

## 15.4

- a) Otos on 59 kyläläisen joukosta valittu 4-alkioinen osajoukko. Erilaisten otosten lukumäärä on

$$\binom{59}{4} = 455126.$$

- b) Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 29 alkioita, voidaan valita 4 alkion osajoukko.

$$\binom{29}{4} = 23751$$

- c) Lasketaan tapahtuman ”otos koostuu pelkistä lopettamisen kannattajista” todennäköisyys.

$$P(\text{pelkästään lopettamisen kannattajia}) = \frac{23\,751}{455\,126} \approx 0,0522$$

### Vastaus

- a) 455 126  
b) 23 751  
b) 0,0522

## 15.5

- a) Hedelmälaatikon 50 hedelmästä voidaan valita 5 hedelmän joukko  $\binom{50}{5}$  tavalla.

Hedelmälaatikossa on  $50 - 8 = 42$  hedelmää, jotka eivät ole pilalla.

Näistä hedelmistä voidaan 5 hedelmän joukko valita  $\binom{42}{5}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman ”ei yhtään pilaantunutta” todennäköisyys.

$$P(\text{ei yhtään pilaantunutta}) = \frac{\binom{42}{5}}{\binom{50}{5}} \quad \text{Laskimella } \frac{nCr(42, 5)}{nCr(50, 5)}.$$
$$= 0,401493 \approx 0,401$$

- b) Tapahtuma ”täsmälleen yksi pilaantunut” toteutuu, kun viiden hedelmän joukossa on yksi pilaantunut ja neljä pilaantumattomaa.

Pilaantuneista 8 hedelmästä voidaan 1 valita  $\binom{8}{1}$  tavalla.

Pilaantumattomista 42 hedelmästä voidaan loppujen 4 hedelmän joukko valita  $\binom{42}{4}$  tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan viiden hedelmän joukko, jossa on 1

pilaantunut ja 4 pilaantumattomaa, voidaan valita  $\binom{8}{1} \cdot \binom{42}{4}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen yksi pilaantunut}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{42}{4}}{\binom{50}{5}} \approx 0,423$$

- c) Tapahtuman ”ainakin yksi pilaantunut” vastatapahtuma on ”ei yhtään pilaantunutta”. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi pilaantunut}) &= 1 - P(\text{ei yhtään pilaantunutta}) \\ &= 1 - 0,401\,493 \\ &= 0,598\,507 \\ &\approx 0,599 \end{aligned}$$

**Vastaus**

**a)** 0,401

**b)** 0,423

**b)** 0,599

## 15.6

a) 40 lottonumerosta voidaan arpoa 7 voitonnumeroa  $\binom{40}{7} = 18643560$  tavalla.

Neljä oikeaa numeroa arvotuista 7 numerosta voidaan valita  $\binom{7}{4} = 35$  tavalla.

Kolme väärää numeroa voidaan valita 33 muun numeron joukosta  $\binom{33}{3} = 5456$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen neljä voitonnumeroa oikein}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{33}{3}}{\binom{40}{7}} \approx 0,0102$$

- b) Kolme oikeaa numeroa 7 arvotun numeron joukosta voidaan valita  $\binom{7}{3} = 35$  tavalla.

Yksi oikea lisänúmero voidaan valita yhdellä tavalla.

Kolme väärää numeroa voidaan valita 32 muun numeron joukosta  $\binom{32}{3} = 4960$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen neljä voitonnumeroa oikein}) = \frac{\binom{7}{3} \cdot 1 \cdot \binom{32}{3}}{\binom{40}{7}} \approx 0,00931$$

**Vastaus**

a) 0,0102

b) 0,009 31



## 15.7

- a) Kilpailija voidaan valita 8 vaihtoehdosta. Sama henkilö ei voi olla kilpailija ja varahenkilö, joten varahenkilö voidaan valita 7 vaihtoehdosta.

Erilaisia vaihtoehtoja on siis  $8 \cdot 7$ .

Oikea vastausvaihtoehto on 2.

- b) Kilpailija voidaan valita 8 vaihtoehdosta. Vastustaja voidaan valita 2 vaihtoehdosta.

Erilaisia vaihtoehtoja on siis  $8 \cdot 2$ .

Oikea vastausvaihtoehto on 3.

- c) 8 opiskelijasta voidaan valita 2 henkeä

$\binom{8}{2}$  tavalla.

Oikea vastausvaihtoehto on 1.

### Vastaus

- a) 2  
b) 3  
c) 1

## 15.8

a) 8 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivi

$$\binom{8}{7} = 8 \text{ eri tavalla.}$$

b) 9 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivi

$$\binom{9}{7} = 36 \text{ eri tavalla.}$$

c) 10 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivi

$$\binom{10}{7} = 120 \text{ eri tavalla.}$$

d) 11 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivi

$$\binom{11}{7} = 330 \text{ eri tavalla.}$$

### Vastaus

a) 8

b) 36

c) 120

d) 330

## 15.9

a) 3 pojan joukosta voidaan valita 2 poikaa  $\binom{3}{2} = 3$  tavalla.

5 tytön joukosta voidaan valita 2 tyttöä  $\binom{5}{2} = 10$  tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan ryhmä, jossa on 2 poikaa ja 2 tyttöä, voidaan valita  $\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} = 30$  tavalla.

b) Ainakin yksi poika tarkoittaa, että näytelmään valitaan "1 poika ja 3 tyttöä" tai "2 poikaa ja 2 tyttöä" tai "3 poikaa ja 1 tyttö".

1 poika ja 3 tyttöä voidaan valita  $\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3} = 30$  tavalla.

2 poikaa ja 2 tyttöä voidaan valita  $\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} = 30$  tavalla.

3 poikaa ja 1 tyttö voidaan valita  $\binom{3}{3} \cdot \binom{5}{1} = 5$  tavalla.

Vaihtoehtoja on siis yhteensä

$$\underbrace{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3}}_{\substack{1 \text{ poika} \\ 3 \text{ tyttöä}}} + \underbrace{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2}}_{\substack{2 \text{ poikaa} \\ 2 \text{ tyttöä}}} + \underbrace{\binom{3}{3} \cdot \binom{5}{1}}_{\substack{3 \text{ poikaa} \\ 1 \text{ tyttö}}} = 30 + 30 + 5 = 65.$$

**Vastaus**

a) 30   b) 65

## 15.10

a) 40 lottonumerosta voidaan arpoa 7 voitonumeroa  $\begin{pmatrix} 40 \\ 7 \end{pmatrix}$  tavalla.

31 merkkipäiväluvusta voidaan arpoa 7 voitonumeroa  $\begin{pmatrix} 31 \\ 7 \end{pmatrix}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{voittorivi muodostuu merkkipäiväluvuista}) = \frac{\begin{pmatrix} 31 \\ 7 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 40 \\ 7 \end{pmatrix}} \approx 0,141$$

b) 40 lottonumerosta  $40 - 31 = 9$  ei ole merkkipäivälukuja.

9 luvusta voidaan arpoa 7 voitonumeroa  $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{voittorivi ei sisällä yhtään merkkipäivälukua}) = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 40 \\ 7 \end{pmatrix}} \approx 1,93 \cdot 10^{-6}$$

### Vastaus

a) 0,141

b)  $1,93 \cdot 10^{-6}$

## 15.11

- a) Korttipakassa on 26 punaista korttia. Lasketaan, kuinka monella tavalla joukosta, jossa on 26 alkia, voidaan valita 5 alkion osajoukko.

Korttipakan 26 punaisesta kortista voidaan nostaa 5 korttia

$$\binom{26}{5} = 65\,780 \text{ tavalla.}$$

- b) Korttipakassa on 26 mustaa korttia.

a-kohdan perusteella viisi korttia voidaan näistä nostaa 65 780 tavalla.

- c) Kortit ovat samanvärisiä, jos kaikki viisi korttia ovat mustia tai kaikki viisi korttia ovat punaisia.

Korttipakasta voidaan valita viisi samanväristä korttia

$$65\,780 + 65\,780 = 131\,560 \text{ tavalla.}$$

### Vastaus

- a) 65 780
- b) 65 780
- c) 131 560

## 15.12

- a) Jokainen otos on 48 jäsenen joukosta valittu 5-alkioinen osajoukko. Erilaisten otosten lukumäärä on

$$\binom{48}{5} = 1712304.$$

- b) Puhtaita urheilijoita on joukkueessa  $48 - 6 = 42$ . Otoksia, joissa on pelkästään puhtaita urheilijoita, on  $\binom{42}{5} = 850668$ .

- c) Lasketaan tapahtuman ”otoksessa on pelkästään puhtaita urheilijoita” todennäköisyys.

$$P(\text{pelkästään puhtaita urheilijoita}) = \frac{850\,668}{1\,712\,304} \approx 0,497$$

### Vastaus

a) 1 712 304

b) 850 668

b) 0,497

## 15.13

a) 20 opiskelijasta voidaan valita 3 opiskelijan joukko  $\binom{20}{3}$  tavalla.

15 tehtävät tehneestä opiskelijasta voidaan valita 3 opiskelijan joukko  $\binom{15}{3}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{jokainen valittu laskenut tehtävät}) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} \approx 0,399$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi valittu ei ole laskenut tehtäviä” vastatapahtuma on ”jokainen valittu on laskenut tehtävät”. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi ei laskenut tehtäviä}) &= 1 - P(\text{jokainen laskenut tehtävät}) \\ &= 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} \\ &\approx 0,601 \end{aligned}$$

**Vastaus**

a) 0,399

b) 0,601

## 15.14

a) Päänumerot voidaan valita  $\binom{48}{6}$  tavalla ja vikingnumero  $\binom{8}{1}$  tavalla.

Mahdollisia rivejä on yhteensä  $\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1}$  kappaletta.

Neljä oikeaa päänumeroa voidaan valita kuuden numeron joukosta  $\binom{6}{4}$  tavalla.

Kaksi muuta päänumeroa voidaan valita  $48 - 6 = 42$  numeron joukosta  $\binom{42}{2}$  tavalla.

Oikea vikingnumero voidaan valita yhdellä tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P$ (täsmälleen neljä päänumeroa ja vikingnumero oikein)

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{42}{2} \cdot 1}{\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1}} \\ & \approx 0,000132 \end{aligned}$$



b) Väärä vikingnumero voidaan valita 7 numeron joukosta  $\binom{7}{1}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{täsmälleen neljä päänumeroa oikein ja vikingnumero väärin})$

$$\begin{aligned} &= \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{42}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1}} \\ &\approx 0,000921 \end{aligned}$$

**Vastaus**

a) 0,000 132

b) 0,000 921

## 15.15

- a) Voittaja voidaan valita 5 kilpailijan joukosta, sen jälkeen hopeamitalisti 4 kilpailijan joukosta ja pronssimitalisti 3 kilpailijan joukosta.

Erilaisia tapoja jakaa mitalit on  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

Mitalit voidaan jakaa juuri oikeille kilpailijoille ainoastaan yhdellä tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{mitalit juuri oikeille kilpailijoille}) = \frac{1}{60} \approx 0,0167$$

- b) Mitalikolmikko voidaan valita viiden urheilijan joukosta  $\binom{5}{3}$  tavalla.

Oikeita mitalikolmikkoja on yksi kappale.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{mitalikolmikko on oikea}) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0,1$$

### Vastaus

a) 0,0167

b) 0,1

## 15.16

- a) Kymmenestä opiskelijasta voidaan valita ensin muodostettavaan joukkueeseen viisi opiskelijaa  $\binom{10}{5} = 252$  tavalla.

Jäljelle jäävistä viidestä opiskelijasta voidaan valita toiseen joukkueeseen viisi opiskelijaa yhdellä tavalla.

Kaksi joukkuetta tässä järjestyksessä voidaan muodostaa tuloperiaatteen mukaan  $252 \cdot 1 = 252$  tavalla.

Näin pääättelemällä tulee jokainen joukkue laskettua mukaan kaksi kertaa, sekä valituksi tulemisen kautta, että valitsematta jäämisen kautta.

Koska ei ole merkitystä missä järjestyksessä joukkueet muodostetaan, voidaan joukkueet muodostaa  $\frac{252}{2} = 126$  tavalla.

- b) 15 opiskelijasta voidaan valita ensimmäiseksi muodostettavaan joukkueeseen viisi opiskelijaa  $\binom{15}{5} = 3003$  tavalla.

Jäljelle jäävistä 10 opiskelijasta voidaan valita toiseen joukkueeseen viisi opiskelijaa  $\binom{10}{5} = 252$  tavalla.

Kaksi joukkuetta tässä järjestyksessä voidaan muodostaa tuloperiaatteen mukaan  $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} = 756 \cdot 252$  tavalla.

Koska ei ole merkitystä missä järjestyksessä joukkueet muodostetaan, voidaan joukkueet muodostaa  $\frac{756 \cdot 252}{2} = 95 \cdot 378$  tavalla.

### Vastaus

a) 126

b) 378 378

## 15.17

15 arvasta voidaan valita 3 arvan joukko  $\binom{15}{3}$  tavalla.

Tapahtuman ”ainakin yksi arpa voittaa” vastatapahtuma on ”yksikään arpa ei voita”.

Arpoja, joissa ei ole voittoa, on  $15 - 6 = 9$ . Näistä voidaan valita 3 arvan joukko  $\binom{9}{3}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi arpa voittaa” todennäköisyys.

$$P(\text{ainakin yksi arpa voittaa}) = 1 - P(\text{yksikään arpa ei voita})$$

$$= 1 - \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}$$
$$\approx 0,815$$

**Vastaus**

0,815

## 15.18

Tapahtuman ”ainakin yksi ensimmäisen kerroksen huoneista on vapaana” vastatapahtuma on ”ensimmäisessä kerroksessa ei ole yhtään vapaata huonetta”.

Kaikkiaan 22 huoneesta 4 vapaata huonetta voidaan valita

$\binom{22}{4}$  tavalla.

Muulla kuin ensimmäisessä kerroksessa on 18 huonetta. Näistä huoneista

4 vapaata huonetta voidaan valita  $\binom{18}{4}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi ensimmäisen kerroksen huoneista on vapaana” todennäköisyys.

$P(\text{ainakin yksi ensimmäisen kerroksen huoneista on vapaana})$

$= 1 - P(\text{ensimmäisessä kerroksessa ei ole yhtään vapaata huonetta})$

$$= 1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{22}{4}}$$

$\approx 0,582$

**Vastaus**

0,582

## 15.19

Jos opettaja osaa  $n$  vitsiä, niin erilaisia vitsikolmikkoja voidaan muodostaa  $\binom{n}{3}$  kappaletta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä vitsien  $n$  lukumäärällä erilaisia vitsikolmikoita on 35.

$$\binom{n}{3} = 35$$

$$n = 7$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Komento esimerkiksi:

```
solve(nCr(n, 3) = 35, n).
```

Opettajan riittää osata 7 vitsiä.

**Vastaus**

7

## 15.20

- a) Kättelyyn osallistuu kerrallaan kaksi henkilöä. Lasketaan, kuinka monta kahden hengen osajoukkoa voidaan muodostaa 25 vieraan joukosta.

$$\binom{25}{2} = 300$$

Juhlissa suoritettiin 300 kättelyä.

- b) Merkitään vieraiden lukumäärää kirjaimella  $x$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen henkilön joukosta voidaan muodostaa kahden hengen osajoukko 703 tavalla.

$$\binom{x}{2} = 703$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Komento esimerkiksi:

`solve(nCr(x,2)=703,x)`

$$x = -37 \text{ tai } x = 38$$

Koska vieraiden lukumäärä on positiivinen luku, niin  $x = 38$ .

### Vastaus

- a) 300  
b) 38

## 15.21

- a) Muokataan yhtälön vasenta puolta ja pyritään saattamaan lauseke muotoon, joka on yhtälön oikealla puolella.

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Lavennetaan niin, että osoittajassa on luvun 9 kertoma.

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Tunnistetaan lukujen 9 ja 5 kertomat.

$$= \frac{9!}{4! \cdot 5!}$$

Tunnistetaan, että  $5 = 9 - 4$ .

$$= \frac{9!}{4! \cdot (9 - 4)!}$$

On osoitettu, että  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9!}{4! \cdot (9 - 4)!} \square$

- b)

$$\binom{14}{5}$$

Käytetään teorian tekstissä olevaa merkinnän määritelmää.

$$= \frac{\overbrace{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}^{5 \text{ kpl}}}{5!}$$

Käytetään a-kohdan kaavaa.

$$= \frac{14!}{5! \cdot (14 - 5)!}$$

$$= \frac{14!}{5! \cdot 9!}$$

Lasketaan laskimella.

$$= 2002$$

**Vastaus**

- b) 2002